ЧАСТЬ 3 Материалы для практических занятий

Оцените решения, данные в упражнениях. Комментарии и ответы в конце части.

Задание 20

Упражнение 20.1. Решите уравнение $(x-2)\cdot(x^2+6x+9)=6(x+3)$.

Ответ: $-4, -3, 3$.

№20 $(x-2)(x^2+6x+9)=6(x+3)$

$(x-2)(x+3)^2-6(x+3)=0$

$(x+3)((x-2)(x+3)-6)=0$

$x=-3$ и $x^2+3x-2x-6-6=0$

$x^2+x-12=0$

$a=1$ | Д $=1+48=49$

$b=1$ | Д >0, 2 корня

$c=-12$ | $x_1=\frac{-1-7}{2}=\frac{-8}{2}=-4$

$x_2=\frac{-1+7}{2}=\frac{6}{2}=3$

Ответ: $-4; 3$

Упражнение 20.2. Решите уравнение $x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$.

Ответ: $-4, -1, 1$.

1·20

$x^3 + 4x^2 - x - 4 = 0$

$x^2(x+4) - 1\cdot(x+4)$

$(x+4)(x^2-1) - 5$

$x^2 - 4 = 0$

$x_1 = -1$

$x^2 - 1 = 0$

$x_2^2 = 1$

$x_2 = 1$

$x_2 = -1$

[illegible]

Ответ: $-4; 1; -1$

Упражнение 20.3. Решите уравнение $x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$.

Ответ: -5.

20.

$x^2 - 3x + \sqrt{6-x} = \sqrt{6-x} + 40$

$x^2 - 3x + \cancel{\sqrt{6-x}} - \cancel{\sqrt{6-x}} - 40 = 0$

$x^2 - 3x - 40 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-40) = 9 + 160 = 169$

$D > 0 \Rightarrow 2$ k

$x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)+\sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{3+13}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-3)-\sqrt{169}}{2 \cdot 1} = \frac{3-13}{2} = \frac{-10}{2} = -5.$

Ответ: $-5; 8.$

Упражнение 20.4. Решите уравнение $(x-2)\cdot(x^2+2x+1)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

2‖326000‖650518‖ Условия задания переписывать не нужно

№ 20

$(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$ $\quad$ $(x-2)(x+1)^2-4(x+1)=0$

$(x-2)(x^2+2x+1)-4(x+1)=0$ $\quad$ $(x+1)((x-2)(x+1)-4)=0$

$\cancel{x^3+2x^2+x-2x^2-4x-2-4x-4=0}$ $\quad$ $x+1=0$ или $(x-2)(x+1)-4=0$

$\cancel{x^3-7x-6=0}$ $\quad$ $x=-1$ $\quad$ $x^2-x-6=0$

$\cancel{x^3-7x=6}$ $\quad$ $D=1-4(-6)=\sqrt{25}=5$

$\cancel{x(x^2-7)=6}$ $\quad$ $x_1=\frac{1-5}{2}=2$

$\cancel{x=6 \text{ или } x^2-7=6}$ $\quad$ $x_2=\frac{1+5}{2}=3$

$\cancel{x^2=13 \quad x=\sqrt{13}}$ ~~Ответ: $\sqrt{13}$; 6~~ $\quad$ Ответ: $-1;2;3$

Упражнение 20.5. Решите уравнение $\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$.

Ответ: $0{,}8,\ 1{,}5$.

$$\frac{1}{(x-1)^2}+\frac{3}{x-1}-10=0$$

$$\frac{1+3(x-1)-10(x-1)^2}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{1+3x-3-10x^2+20x-10}{(x-1)^2}=0$$

$$\frac{-10x^2+23x-12}{(x-1)^2}=0 \qquad D=23\cdot 23-4\cdot 10\cdot 12=529-480=49$$

$$x_{1,2}=\frac{-23\pm 7}{-20} \qquad \text{Ответ: } x_1=\frac{2}{3} \quad x_2=\frac{4}{5}$$

Упражнение 20.6. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0,2,\ \ 0,5$.

$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0 \ \Big| \cdot x^2 \ ;\ x \neq 0$

$1+3x-10x^2=0 \ \big| \cdot (-1)$

$10x^2-3x-1=0$

$D=b^2-4ac$

$D=(-3)^2-4\cdot 10\cdot(-1)=49 \ ;\ \sqrt{D}=\pm 7$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}\ ;\ x=\frac{3\pm 7}{2\cdot 10}$

$x_1=\frac{3+7}{20}$

$x_1=0,5$

$x_2=\frac{3-7}{20}$

$x_2=-0,2$

Ответ: $x_1=0,5\ ;\ x_2=-0,2$

Упражнение 20.7. Решите уравнение $\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$.

Ответ: $-0{,}2$, $0{,}5$.

$\frac{1}{x^2}+\frac{3}{x}-10=0$

$\frac{1}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{10x^2}{x^2}=0$ $\qquad x\neq 0$

$1+3x-10x^2=0$

$-10x^2+3x+1=0$

$D=9-4\cdot 1\cdot(-10)=9+40=49$

$\sqrt{D}=\pm 7$

$x_1=\frac{-3-7}{-20}=\frac{-10}{-20}=2$

$x_2=\frac{-3+7}{-20}=\frac{4}{-20}=-0,2$

Ответ: $x_1=2$, $x_2=-0,2$

Упражнение 20.8. Решите уравнение $\frac{1}{x^2} + \frac{3}{x} - 10 = 0$.

Ответ: $-0{,}2$, $0{,}5$.

$$\frac{1}{x^2}^{\backslash 1} + \frac{3}{x}^{\backslash x} - 10^{\backslash x^2} = 0$$

ОДЗ: $x \neq 0$

$$1 + 3x - 10x^2 = 0.$$

$$-10x^2 + 3x + 1 = 0 \quad :(-1).$$

$$x^2 + 3x + 1 = 0.$$

$$D = b^2 - 4ac = 9 - 4 \cdot (-1) \cdot 10 = 49.$$

$$x_1 = \frac{3+7}{20} = 0{,}5.$$

$$x_2 = \frac{3-7}{20} = -0{,}8.$$

Ответ: $0{,}5$; $-0{,}8$.

Упражнение 20.9. Решите уравнение $(x-2)\cdot(x^2+2x+1)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

$(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$

$(x^2+2x+1)=(x+1)^2$

$(x-2)(x+1)^2-4(x+1)=0$

$(x-2)(x+1)(x+1)-4(x+1)=0$

$(x+1)((x-2)(x+1)-4)=0$

$x+1=0$

$x=-1$

$(x-2)(x+1)-4=0$

$x^2-2x+x-2=0$

$x^2-3x-2=0$

$x^2-3x-2=0$

$a=1$ $b=-3$ $c=-2$

$D=b^2-4ac$

$D=3^2-4\cdot1\cdot(-2)=9+8=-1$

$D<0$ корней нет

Ответ: -1

Упражнение 20.10. Решите уравнение $(x-2)\cdot(x^2+2x+1)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

$$(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$$
$$(x-2)(x+1)^2=4(x+1)$$
$$(x-2)(x+1)(x+1)-4(x+1)=0$$
$$(x+1)^2((x+1)(x-2)-4)=0$$
$$(x+1)^2(x^2-2x+x-2-4)=0$$
$$(x+1)^2(x^2-x-6)=0$$

$x^2+1=0$ $\qquad$ $x^2-x-6=0$

$x^2=1$ $\qquad$ $D=b^2-4ac$

$x^1=-1$ $\qquad$ $D=1+24$

$D=25$

$x_1=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$

$x_2=\frac{1+5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$

Ответ: 1; -1; 3; -2

Упражнение 20.11. Решите уравнение $(x-2)\cdot(x^2+2x+1)=4(x+1)$.

Ответ: $-2, -1, 3$.

$$(x-2)(x^2+2x+1)=4(x+1)$$

$$(x-2)(x+1)^2-4(x+1)=0$$

$$(x-1)\big((x-2)(x+1)-4\big)=0$$

$x-1=0$ или $(x-2)(x+1)-4=0$

$x=\cancel{-1}\ 1$ $\qquad x^2+x-2x-2-4=0$

$$x^2-x-6=0$$

$$D=1-4\cdot1\cdot(-6)=1+24=25=5^2$$

$$x_1=\frac{1+5}{2}=\frac{6}{2}=3$$

$$x_2=\frac{1-5}{2}=\frac{-4}{2}=-2$$

Ответ: $-2; 1; 3$

Задание 21

Упражнение 21.1. Игорь и Паша могут покрасить забор за 20 часов, Паша и Володя – за 21 час, а Володя и Игорь за 28 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 900 минут.

1) Пусть работа, которую нужно сделать во всех случаях равна 1.
2) Пусть производительность труда Игоря - x, Паши - y, а Володи - z
3) Тогда: производительность труда Игоря и Паши = $x+y=\frac{1}{20}$ (ч
Паши и Володи - $y+z=\frac{1}{21}$ (часа)
Володи и Игоря - $z+x=\frac{1}{28}$ (часа)
4) Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\frac{1}{20} \\ y+z=\frac{1}{21} \\ z+x=\frac{1}{28} \end{cases}$$

$$x=\frac{1}{20}-y$$

$$z=\frac{1}{21}-y$$

$$\frac{1}{20}-y+\frac{1}{21}-y=\frac{1}{28}$$

$$-2y=\frac{1}{28}-\frac{1}{20}-\frac{1}{21}$$

$$-2y=\frac{15-20-21}{420}$$

$$-2y=\frac{-26}{420}$$

$$y=\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{1}{20}-\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{21}{420}-\frac{13}{420}$$

$$x=\frac{8}{420}$$

$$z=\frac{1}{21}-\frac{13}{420}$$

$$z=\frac{20}{420}-\frac{13}{420}$$

$$z=\frac{7}{420}$$

5) Таким образом производительность всех мальчиков:
$\frac{8}{420}+\frac{7}{420}+\frac{13}{420}=\frac{28}{420}$ - в час, а в минуту: $\frac{28}{420\cdot 60}$
6) Время за которое они выполнят работу:
$1:\frac{28}{420\cdot 60}=\frac{420\cdot 60}{28}=\frac{60\cdot 60}{4}=900$ минут
Ответ: за 900 минут мальчики прокрасят забор, работая втроем.

Упражнение 21.2. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

$И + П = 14$

$П + В = 15$

$В + И = 30$

$$\begin{cases} x+y = \frac{1}{14} \\ y+z = \frac{1}{15} \\ z+x = \frac{1}{30} \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y = \frac{1}{14} \\ y = \frac{1}{15} - z \\ x = \frac{1}{30} - z \end{cases}$$

$$\frac{1}{15} - z + \frac{1}{30} - z = \frac{1}{14}$$

$$-2z + \frac{3}{30} = \frac{1}{14}$$

$$-2z = \frac{1}{14} - \frac{3}{30}$$

$$-2z = \frac{30-42}{420}$$

$$2z = \frac{12}{420}$$

$$z = \frac{12}{420} : 2 = \frac{12}{420} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{70}$$

$$y = \frac{1}{15} - \frac{1}{70} = \frac{70-15}{1050} = \frac{55}{1050}$$

$$x = \frac{1}{30} - \frac{1}{70} = \frac{70-30}{2100} = \frac{40}{2100} = \frac{4}{210}$$

$$\frac{1}{70} + \frac{55}{1050} + \frac{4}{210} = \frac{7}{210} + \frac{55}{1050} = \frac{1}{30} + \frac{55}{1050} = \frac{1050+1650}{31500} =$$

$$= \frac{2700}{31500} = \frac{27}{315} \text{ (ч)}$$

$$\frac{27}{315} \cdot \frac{60}{1} = \frac{1620}{315} = 5\frac{45}{315} = 5\frac{1}{7} \text{ (минут)}$$

Ответ: $5\frac{1}{7}$ (минут)

Упражнение 21.3. Два велосипедиста одновременно отправляются в 209-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 8 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 8 часов раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 11 км/ч.

2 326000 346442

Условия задания переписывать не нужно

21. Пусть x км/ч – скорасть 2 велосипедиста, тогда (x+8) км/ч – скорасть 1 велосипедиста, общее расстояние 209 км.

$\frac{209}{x}$ ч – время 2 велосипедиста

$\frac{209}{x+8}$ ч – время 1 велосипедиста.

$\frac{209}{x}^{\backslash x+8} - \frac{209}{x+8}^{\backslash x} = 8^{\backslash x(x+8)}$

$209x + 1672 - 209x = 8x^2 + 64x$

$-8x^2 - 64x + 1672 = 0 \quad | -8$

$x^2 + 8x - 209 = 0$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 8^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-209) = 64 + 836 = 900 \; (D > 0)$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

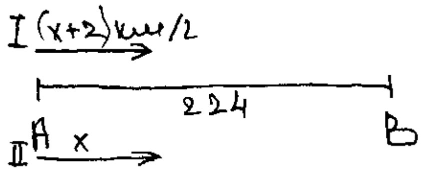
$x_1 = \frac{-8 - \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-8-30}{2} = -16$ – ~~не~~ не подходит по условию задачи.

$x_2 = \frac{-8 + \sqrt{900}}{2 \cdot 1} = \frac{-8+30}{2} = 11.$

Ответ: 11 км/ч.

Упражнение 21.4. Два велосипедиста одновременно отправляются в 224-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 2 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 2 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу вторым.

Ответ: 14 км/ч.



	v	t	S
I	(x+2) км/ч	$\frac{240}{x+2}$ ч	240 км
II	x км/ч	$\frac{240}{x}$ ч	240 км

По условию задачи известно, что первый велосипедист прибыл к финишу раньше на 2 часа второго, отсюда уравнение.

$$\frac{240}{x}-\frac{240}{x+2}=2$$

$$\frac{240}{x}^{\backslash x+2}-\frac{240}{x+2}^{\backslash x}-2^{\backslash (x^2+2x)}$$

$$\frac{240(x+2)-240x-2(x^2+2x)}{x(x+2)}=0$$

$$24\cancel{0x}+480-2\cancel{40x}-2x^2-4x=0$$

$$-2x^2-4x+\cancel{240}\ 480=0 \quad /:-2$$

$$x^2+2x-\cancel{240}=0$$

ОДЗ

$x(x+2)\neq 0$

$x\neq 0 \quad x+2\neq 0$

$x\neq -2$

$D=b^2-4ac$ -240

$D=4-4\cdot 1\cdot(\cancel{-480})=4+960=964$

$x_1=\frac{-2-\sqrt{964}}{2}$ — не подходит по усл. задачи т.к. <0

$x_2=\frac{-2+\sqrt{964}}{2}$ — скорость второго велосипедиста

Ответ: $\frac{-2+\sqrt{964}}{2}$ скорость второго велосипедиста.

Упражнение 21.5. Игорь и Паша могут покрасить забор за 14 часов, Паша и Володя – за 15 часов, а Володя и Игорь за 30 часов. За какое время покрасят забор мальчики, работая втроем. Ответ дайте в минутах.

Ответ: 700 минут.

21.	v частей забора/ч	t ч	A частей забора
И+П	$\frac{1}{14}$	14	1
П+В	$\frac{1}{15}$	15	1
В+И	$\frac{1}{30}$	30	1

$$v(И+П+П+В+В+И) = \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{30} = \frac{1}{14} + \frac{1}{10} = \frac{5+7}{70} = \frac{12}{70} = \frac{6}{35} \text{ (ч.з./ч)}$$

$$t = \frac{A}{v} = \frac{1}{\frac{6}{35}} = \frac{35}{6} \text{ ч} = \frac{35 \cdot 60}{6} \text{ мин} = 350 \text{ мин}$$

Ответ: 350

Упражнение 21.6. Два автомобиля одновременно отправляются в 720-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 30 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 90 км/ч.

	V, км/ч	t, ч	S, км
I авт	$x+30$	$\frac{720}{x+30}$ чем	720
II авт	x	$\frac{720}{x}$ на 4ч раньше	720

Пусть x – собств. скорость II автомобиля

$$\frac{720}{x} - \frac{720}{x+30} = 4 \quad \Big| \cdot x(x+30) \qquad \begin{matrix} x \neq 0 \\ x \neq -30 \end{matrix}$$

$$720x + 2160 - 720x = 4x^2 + 120x$$

$$2160 - 4x^2 - 120x = 0 \quad \Big| \cdot (-1)$$

$$4x^2 + 120x - 2160 = 0 \quad \Big| : 4$$

$$x^2 + 30x - 540 = 0$$

$$D = 900 + 4 \cdot 540 = 3060$$

$$x_1 = \frac{-30 + 6\sqrt{85}}{2} = -15 + 3\sqrt{85}$$

$$x_2 = \frac{-30 - 6\sqrt{85}}{2} = -15 - 3\sqrt{85} < 0$$

$$V_{I\ \text{автомобиля}} \rightarrow -15 + 3\sqrt{85} + 30 = 3\sqrt{85} + 15$$

Ответ: $3\sqrt{85} + 15$

Упражнение 21.7. Два автомобиля одновременно отправляются в 720-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 30 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 90 км/ч.

Обозначим v 1 автомобиля за x.

	v км/ч	t ч.	S км.
1 авто	x	$\frac{x}{720}$	720
2 авто	x − 30	$\frac{x-30}{720}$	720

Известно, что 1 авто. приехал на 4 ч. раньше 2 авто.

Запишем уравнение:

$$\frac{720}{x-30} - \frac{720}{x} = 4, \quad |\cdot x(x-30)$$

ОДЗ: $x(x-30) \neq 0$

$x \neq 0$ и $x \neq 30$.

$$\frac{720x - 720(x-30) - 4x(x-30)}{x(x-30)} = 0$$

$$\frac{\cancel{720x} - \cancel{720x} + 21600 - 4x^2 + 120x}{x(x-30)} = 0$$

$$-4x^2 + 120x + 21600 = 0 \; |:(-4),$$

$$x^2 - 30x - 5400 = 0,$$

$$D = 900 + 21600 = 22500 = 150^2.$$

$$x_1 = \frac{30-150}{2} = -60$$ — не удовлетворяет условиям задачи.

$$x_2 = \frac{30+150}{2} = 80$$

v 1 авто = x, значит v 1 авто = 80 км/ч,

Ответ: 80 км/ч.

Упражнение 21.8. Два автомобиля одновременно отправляются в 720-километровый пробег. Первый едет со скоростью на 30 км/ч большей, чем второй, и прибывает к финишу на 4 часа раньше второго. Найдите скорость первого автомобиля.

Ответ: 90 км/ч.

Пусть x км/ч – скорость I автомобиля,
тогда $(x-30)$ км/ч – скорость II автомобиля

/////	V(км/ч)	t(ч)	S(км)
I	x	$\frac{720}{x}$	720
II	$x-30$	$\frac{720}{x-30}$	720

По условию:
$t_{II} > t_I$ на 4 ч $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ~~Составим уравнение~~:
$t_{II} - t_I = 4$
Составим уравнение:

$$\frac{720}{x-30} - \frac{720}{x} = 4$$

ОДЗ:
$x \neq 30 \quad x > 0$

$$\frac{720x - 720(x-30)}{x(x-30)} = 4$$

$$720x - 720x + 720\cdot 30 = 4x(x-30)$$

$$4x^2 - 120x - 720\cdot 30 = 0$$

$$x^2 - 30x - 5400 = 0$$

Ответ: ~~90 км/ч~~

$D = 900 + 21600 = 22500$

$x_1 = \frac{30+\sqrt{22500}}{2} = 90$ (км/ч) – скорость I автомобиля

$x_2 = \frac{30-\sqrt{22500}}{2} = -60$ (км/ч) – не удовлетворяет ОДЗ

Ответ: 60 км/ч

Задание 22

Упражнение 22.1. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x \ge -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x<-2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2$, $m>6$.

№22. $y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при } x \ge -2 \\ -\frac{6}{x} & \text{при } x<-2 \end{cases}$

1) $y=x^2+2$ при $x \ge -2$

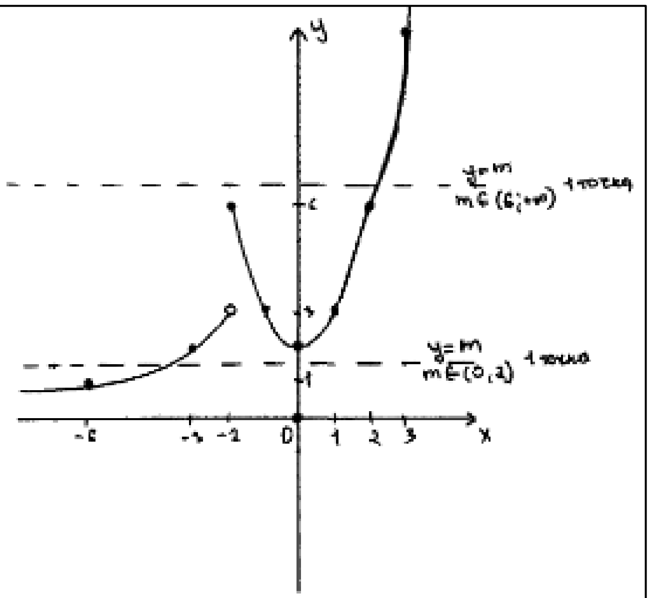
$y=x^2+2$ – парабола вида $y=x^2$

$x_0=-\frac{b}{2a}=0$

$y_0=0+2=2$

Вершина $(0;2)$

x	-2	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6	11



2) $y=-\frac{6}{x}$ при $x<-2$

$y=-\frac{6}{x}$ – график – гипербола

x	-6	-3	-2
y	1	2	3

← выколотая точка

$y=m$ – прямая параллельная Ox, имеет 1 общую точку с построенным графиком при $m \in (0;2) \cup (6;+\infty)$

Ответ: $(0;2)\cup(6;+\infty)$

Упражнение 22.2. Постройте график функции

$$y=\begin{cases} x^2+2 & \text{при} \quad x \ge -2, \\ -\dfrac{6}{x} & \text{при} \quad x < -2. \end{cases}$$

Определите, при каких значениях m прямая $y=m$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Ответ: $0<m<2,\ m>6$.

22.

$y=\begin{cases} x^2+2, & x \geqslant -2 \\ -\frac{6}{x}, & x<-2 \end{cases}$ – кусочно заданная функция с $D(y)=\mathbb{R}$

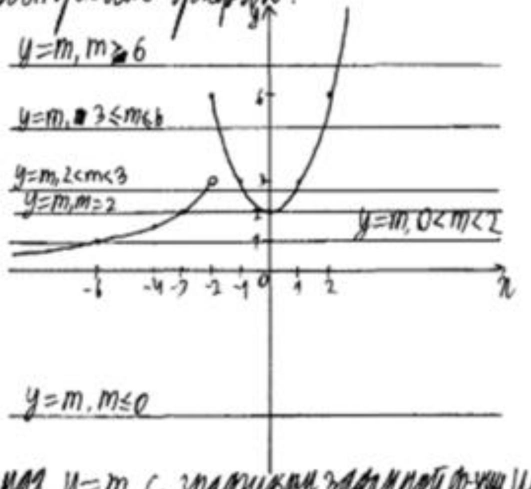
$y=x^2+2$ – квадратичная ф-ция, график – парабола с ветвями, направленными вверх и вершиной $(0;2)$

x	-2	-1	0	1	2
y	6	3	2	3	6

$y=-\frac{6}{x}$ - ф-ция обратной пропорциональности, график – гипербола, расположенная в II и IV четвертях

x	-2	-3	-4	-6
y	3	2	$1\frac{1}{2}$	1

Построим график:



Прямая $y=m$ с графиком заданной ф-ции имеет: • 0 общих точек при $m\in(-\infty;0]$

• 1 общую точку при $m\in(0;2)\cup(6;+\infty)$

• 2 общие точки при $m\in\{2\}\cup[3;6]$

• 3 общие точки при $m\in(2;3)$

Ответ: $(0,2)\cup(6;+\infty)$

Упражнение 22.3. Постройте график функции $y = \frac{1{,}5|x|-1}{|x|-1{,}5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0, -2{,}25,\ 2{,}25$.

$$y = \frac{1{,}5|x|-1}{|x|-1{,}5x^2}$$

(1) при $x \geq 0$

$$y = \frac{1{,}5\cdot x - 1}{x - 1{,}5\cdot x^2} = \frac{1{,}5x-1}{-(1{,}5x^2 - x)} = -\frac{\cancel{(1{,}5x-1)}}{x\cancel{(1{,}5x-1)}} = -\frac{1}{x}.$$

x	1	4	5
y	-1	-0,25	-0,2

$y(1) = -\frac{1}{1} = -1$

~~$y(5) = -\frac{1}{5} = -0{,}2$~~

$y(4) = -\frac{1}{4} = -0{,}25$

$y(5) = -\frac{1}{5} = -0{,}2$

(2) при $x < 0$

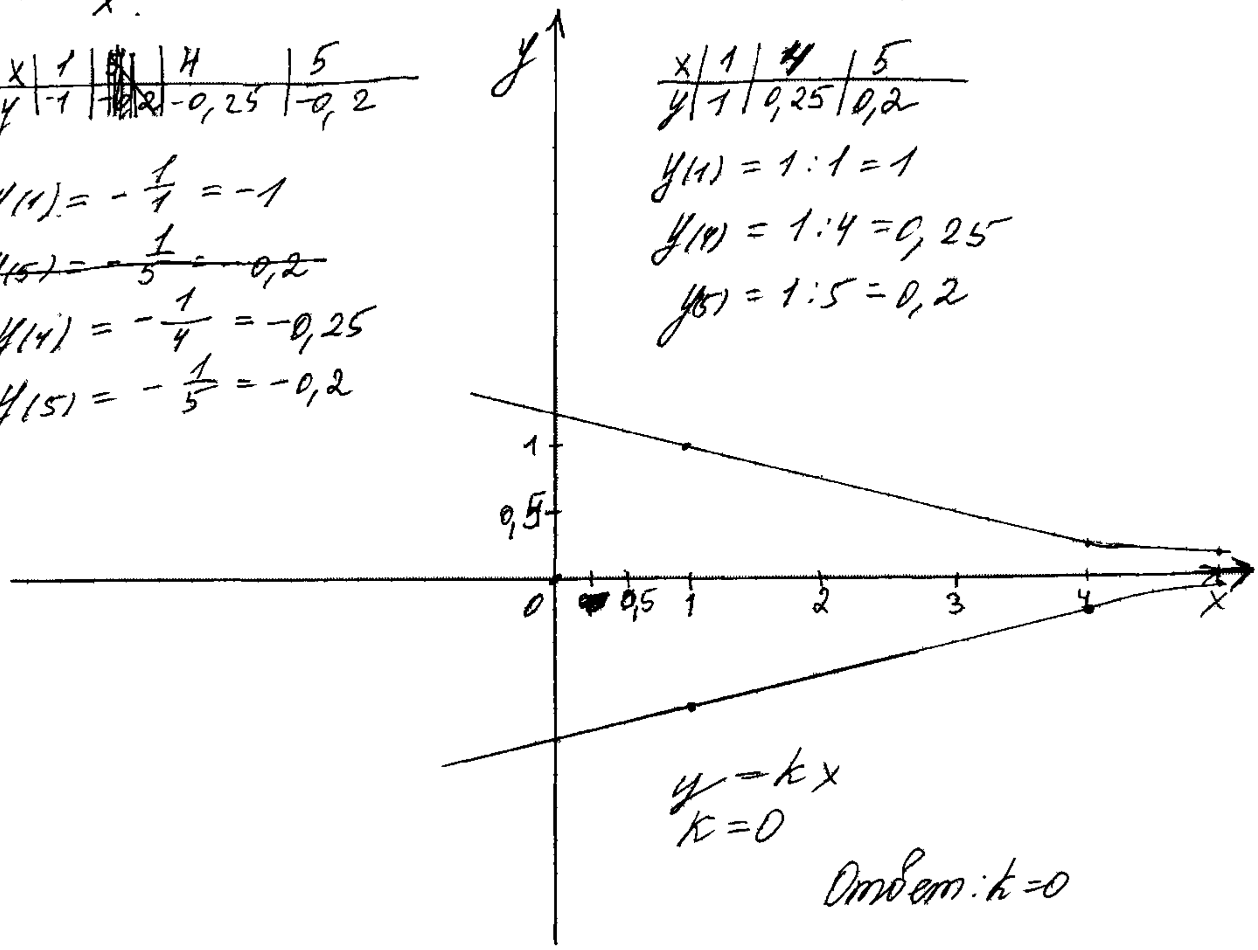
$$y = \frac{1{,}5\cdot(-x)-1}{-x-1{,}5\cdot(-x)^2} = \frac{-1{,}5x-1}{-x-1{,}5x^2} = \frac{\cancel{(-1{,}5x-1)}}{x\cancel{(-1-1{,}5x)}} = \frac{1}{x}$$

x	1	4	5
y	1	0,25	0,2

$y(1) = 1:1 = 1$

$y(4) = 1:4 = 0{,}25$

$y(5) = 1:5 = 0{,}2$



$y = kx$

$k = 0$

Ответ: $k = 0$

Упражнение 22.4. Постройте график функции $y = \frac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

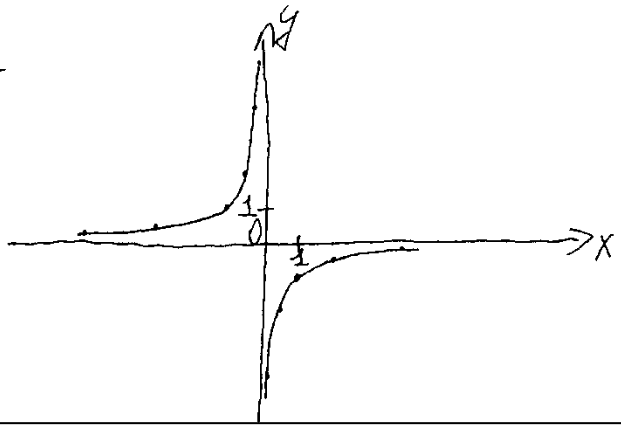
Ответ: $0, -2,25, \ 2,25$.

№22

$$y=\frac{1,5|x|-1}{|x|-1,5x^2}=\frac{\cancel{1,5|x|-1}}{-x(\cancel{1,5|x|-1})}=-\frac{1}{x}$$

$y=-\frac{1}{x}$ - гипербола

x	1	2	4
y	-1	-0,5	-0,25



Упражнение 22.5. Постройте график функции $y = \dfrac{2,5|x| - 1}{|x| - 2,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0, -6,25,\ 6,25$.

$y = \dfrac{2,5|x| - 1}{|x| - 2,5x^2}$

(1сл $|x| \geq 0$)

1сл $x \geq 0$ | 2сл $x < 0$

$|x| = x$ | $|x| = -x$

$y = \dfrac{2,5x - 1}{x - 2,5x^2}$ | $y = \dfrac{-2,5x - 1}{-x - 2,5x^2}$

$y = -\dfrac{1 - 2,5x}{x(1 - 2,5x)}$ | $y = \dfrac{-(2,5x + 1)}{-x(1 + 2,5x)}$

$y = -\dfrac{1}{x}$ | $y = \dfrac{1}{x}$

при $x \geq 0$

$x - 2,5x^2 \neq 0$

$x(1 - 2,5x) \neq 0$

$x \neq 0$ или $1 - 2,5x \neq 0$

$2,5x \neq 1$

$x \neq \dfrac{1}{2,5}$

$x \neq 0,4$

при $x < 0$

$-x - 2,5x^2 \neq 0$

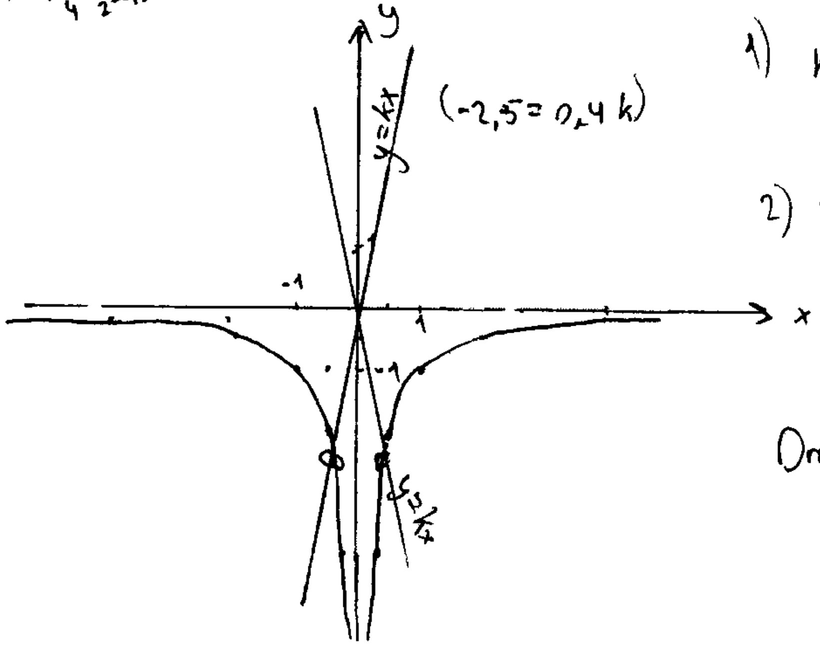
$-x(\cancel{0}\ 1 + 2,5x) \neq 0$

$x \neq 0$ или $\cancel{x}$ $2,5x \neq -1$

$x \neq -0,4$

x	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1	4	2	0,4
y	-2	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	-2,5

x	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	-1	-2	-4	~~0~~	-0,4
y	-2	-4	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$		-2,5



$-2,5 = 0,4k$

1) $k = \dfrac{-2,5}{0,4}$ $/\cdot 10$

$k = -6,25$

2) $-2,5 = -0,4k$

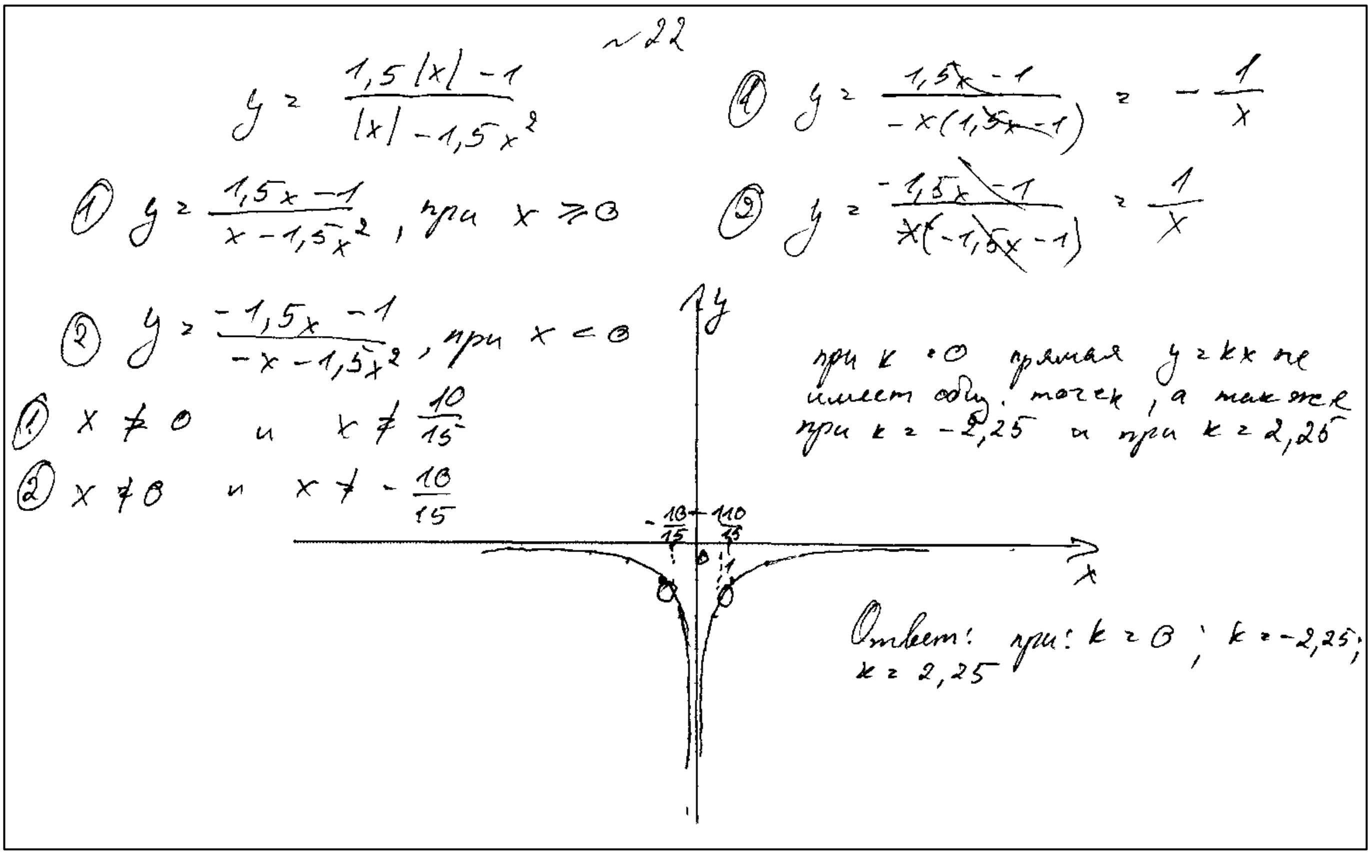
$k = \dfrac{-2,5}{-0,4}$

$k = 6,25$

Ответ: 6,25; -6,25

Упражнение 22.6. Постройте график функции $y = \frac{1{,}5|x|-1}{|x|-1{,}5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0, -2{,}25,\ 2{,}25$.



№22

$y = \frac{1{,}5|x|-1}{|x|-1{,}5x^2}$

① $y = \frac{1{,}5x-1}{x-1{,}5x^2}$, при $x \geqslant 0$

② $y = \frac{-1{,}5x-1}{-x-1{,}5x^2}$, при $x < 0$

① $x \neq 0$ и $x \neq \frac{10}{15}$

② $x \neq 0$ и $x \neq -\frac{10}{15}$

① $y = \frac{\cancel{1{,}5x-1}}{-x\cancel{(1{,}5x-1)}} = -\frac{1}{x}$

② $y = \frac{\cancel{-1{,}5x-1}}{x\cancel{(-1{,}5x-1)}} = \frac{1}{x}$

при $k = 0$ прямая $y = kx$ не имеет общ. точек, а также при $k = -2{,}25$ и при $k = 2{,}25$

Ответ: при: $k = 0$; $k = -2{,}25$; $k = 2{,}25$

Упражнение 22.7. Постройте график функции $y=\dfrac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$ и определите, при каких значениях k прямая $y=kx$ не имеет с графиком ни одной точки пересечения.

Ответ: $0, -6,25,\ 6,25$.

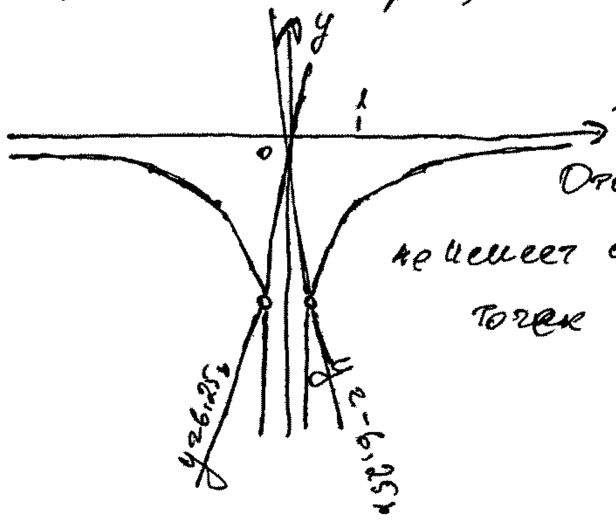
$y=\dfrac{2,5|x|-1}{|x|-2,5x^2}$

Раскрывая модуль данной функции, получим:

$y=\begin{cases} -\dfrac{1}{x}, \text{ при } x>0,\ x\neq 0 \text{ и } x\neq 0,4 \\ \dfrac{1}{x}, \text{ при } x<0,\ x\neq 0 \text{ и } x\neq -0,4 \end{cases}$

$y=-\dfrac{1}{x}$ – обратная пропорциональность, графиком является гипербола во 2 и 4 четверти, выколотая точка: $(0,4; -2,5)$

$y=\dfrac{1}{x}$ – обратная пропорциональность, графиком является гипербола в 1 и 3 четверти, выколотая точка: $(-0,4; -2,5)$



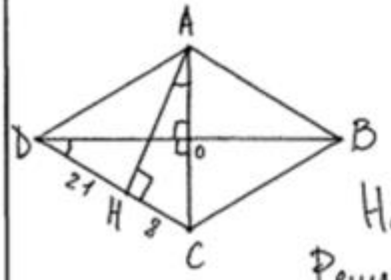
Ответ: прямая $y=kx$ не имеет с графиком общих точек при $k=-6,25$; $6,25$

Задание 23

Упражнение 23.1. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

N 23.



Дано: ABCD - ромб; AH - высота ($\angle H = 90^\circ$);
($AB \parallel DC$; $AD \parallel BC$; $AB = DC = AD = BC$); $DH = 21$; $HC = 8$,
AC, DB - диагонали.

Найти: AH - ?

Решение: Рассмотрим $\triangle DOC$ и $\triangle AHC$.

см. лист 4

$\angle ODC = \angle HAC$ (как $\angle$ с взаимоперпендик. сторонами);
$\triangle DOC$ и $\triangle AHC$ - прямоугол. ($\angle O = \angle H = 90^\circ$) $\Rightarrow$
$\triangle DOC \sim \triangle AHC$ (по 2-м углам).

$$\frac{DO}{AH} = \left(\frac{OC}{HC} = \frac{DC}{AC}\right)$$

Диагонали ромба делятся точкой пересечения пополам. $\Rightarrow$

$$OC = \frac{1}{2} AC$$

$$\frac{\frac{1}{2}AC}{HC} = \frac{DC}{AC}; \quad AC = \sqrt{2CH \cdot CD} = \sqrt{2 \cdot 8 \cdot 29} = \sqrt{16 \cdot 29} = 4\sqrt{29}$$

по теореме Пифагора:

$AH^2 = AC^2 + CH^2$

$AH^2 = (4\sqrt{29})^2 + 8^2$

$AH^2 = 16 \cdot 29 + 64$

$AH^2 = 464 + 64$

$AH^2 = 528$

$AH = \sqrt{528} = \sqrt{64 \cdot 16 \cdot 29} = 8 \cdot 4 \cdot \sqrt{29} = 32\sqrt{29}$

Ответ: $32\sqrt{29}$

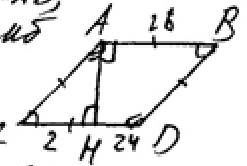
Упражнение 23.2. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 24$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 10.

Дано:
ABCD – ромб
AH – высота
$DH = 24$
$CH = 2$

Найти: $AH = ?$

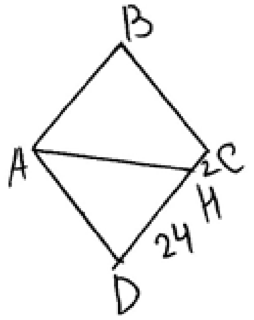
Решение:
$CD = CA = BD = AB$,
т.к. ABCD – ромб
$\Downarrow$
$CH + HD = 26$



$CD = AB = AC = BD = 26$, ~~т.к.~~
~~CA~~ (по теор. Пифагора)
$AH^2 = 26^2 - 2^2 = 676 - 4 =$
$= 672$
$AH = \sqrt{672} = 4\sqrt{42}$
Ответ. $4\sqrt{42}$.

Упражнение 23.3. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 24$ и $CH = 2$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 10.



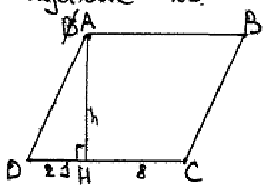
Т.к. у ромба все стороны равны, то $AB = BC = CD = DA = 26$. Тогда $AH^2 = AD^2 - DH^2 =$
$= 676 - 576 = 100 = 10^2$.

Ответ: $AH = 10$.

Упражнение 23.4. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

Задание 23.



Дано:

ABCD - ромб DH = 21 CH = 8

AH - высота делит CD

Найти.

AH-?

Решение

AB = BC = CD = AD AD = DH + CH = 21+8 = 29 (по свойству ромба)

рассмотрим $\triangle ADH$, он прямоугольный т.к. AH - высота.

Воспользуемся теоремой пифагора

$AD^2 = DH^2 + AH^2$ $AH^2 = \sqrt{29^2 - 21^2} = \sqrt{841-441} = \sqrt{400} = 20$

$AH^2 = AD^2 - DH^2$

Ответ. AH = 20

Упражнение 23.5. Окружность пересекает стороны AB и AC треугольника ABC в точках K и P соответственно и проходит через вершины B и C. Найдите длину отрезка KP, если $AP = 21$, а сторона BC в 3 раза меньше стороны AB.

Ответ: 3.

№23 Дано:

$\triangle ABC$

окружность

окр-ть пересекает AB в(.)K

окр-ть пересекает AC в(.)P

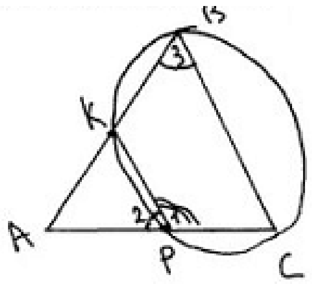
ок-рь проходит через(.)B и(.)C

$AP = 9$

BC в 3 раза < AB

Найти:

KP - ?



↓ смотреть лист 3

1) Рассмотрим четырехугольник KBCP, он вписанный $\Rightarrow$ сумма противоположных углов $= 180°$ $\angle 1 + \angle 3 = 180°$ $\angle 3 = 180° - \angle 1$. 2) Рассмотрим $\angle 1$ и $\angle 2$ - смежные $\Rightarrow$ сумма углов $= 180°$ $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ $\angle 2 = 180 - \angle 1$

$\angle 3$ тоже равен $180° - \angle 1 \Rightarrow \angle 3 = \angle 2$ 3) Рассмотрим $\triangle APK$ и $\triangle ABC$

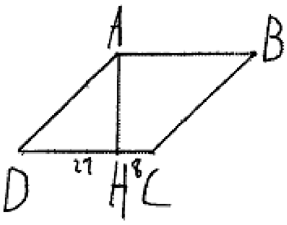
1) $\angle A$ - общий 2) $\angle 3 = \angle 2 \Rightarrow \triangle APK \sim \triangle ABC$ по двум равным углам. 4) Из подобия следует отношение сходственных сторон $\frac{KP}{BC} = \frac{AP}{AB}$ т.к BC в 3 раза меньше AB возьмем $BC = 3$ $AB = 1$ $\frac{x}{3} = \frac{9}{1}$ $x = \frac{9 \cdot 3}{1} = 27$

Ответ: $KP = 27$

Упражнение 23.6. Высота AH ромба $ABCD$ делит сторону CD на отрезки $DH = 21$ и $CH = 8$. Найдите высоту ромба.

Ответ: 20.

№ 23



Дано $DH = 21$, $CH = 8$

Найти AH

$DC = 21 + 8 = 29$

$DC = CB = BA = AD = 29$

$29^2 = 21^2 + x^2$

$841 = 441 + x^2$

$x^2 = 841 - 441$

$x^2 = 400$

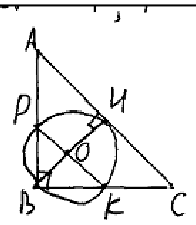
$x = 20$

Ответ: $AH = 20$

Упражнение 23.7. Точка H является основанием высоты BH, проведённой из вершины прямого угла B прямоугольного треугольника ABC. Окружность с диаметром BH пересекает стороны AB и CB в точках P и K соответственно. Найдите PK, если $BH = 13$.

Ответ: 13.

~23



Дано: ABC-прямоугольный Δ; BH-высота; PK=13
AB∩P; CB∩K

Найти: BH

Решение:

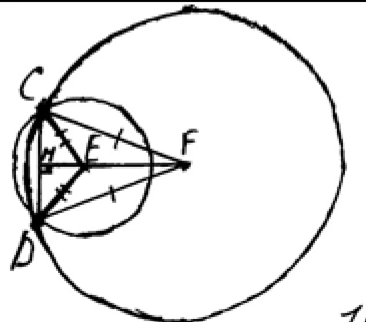
точка O ∩ BH и PK
BH является диаметром окружности ⇒ PK диаметр

Значит PK=BK=13

Ответ: 13

Задание 24

Упражнение 24.1. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, приём точки E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.



Дано: C и D – точки пересечения окружностей;
E и F по одну сторону от CD.
Док-ть: CD ⊥ EF
Док-во:

1) Проведём радиусы CE; ED; CF и FD.
2) Рассмотрим тр-к CDE. Радиусы равны =>
=> тр-к равнобедренный.
3) Проведём медиану EM. В равнобедренном тр-нике медиана, проведённая к основанию явл. высотой => EM – высота.
4) Рассмотрим тр-к CFD. Радиусы равны =>
=> тр-к равнобедренный => медиана, проведённая к основанию явл. высотой. =>
=> FM – медиана и высота.
5) Высоты EM и FM лежат на одной прямой с отрезком FE; Основание CD лежит на прямой CD.
6) Так как высоты тр-ников ⊥ к основанию CD и лежат на одной прямой с EF, то EF ⊥ CD.
ч.т.д.

Упражнение 24.2. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, приём точки E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

Дано: окружность с центром в точке E, окружность с центром в точке F, точки C, D – точки пересечения окружностей

Доказать: EF ⊥ CD

~~1) Рассмотрим треугольник CFD.~~

2) Пусть пересечение EF и CD – K, а пересечение с окружностью

3) Так как центры окружностей находятся на одной прямой, CD их общая хорда, а ~~EF~~ FL – радиус одной из окружностей, то FK делит CD пополам.

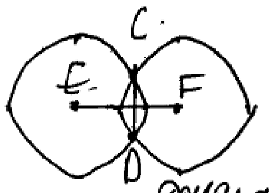
4) Рассмотрим треугольник CFD, FK – медиана CD,

5) FD = FC, т.к. они являются радиусами окружности

6) следовательно △ CFD – равнобедренный, следовательно FK также является высотой, следовательно EF ⊥ CD

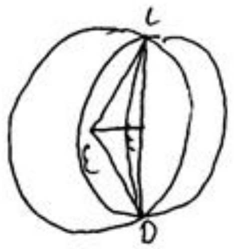
Упражнение 24.3. Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, приём точки *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямые *CD* и *EF* перпендикулярны.

Задание № 24
Дано:
E и F - центры окружностей,
Доказать, что CD ⊥ EF - ?



Доказательство:
CD является внутренней касательной к окружностям, а значит образует угол = 90°, таким образом CD ⊥ EF.

Упражнение 24.4. Две окружности с центрами *E* и *F* пересекаются в точках *C* и *D*, приём точки *E* и *F* лежат по одну сторону относительно прямой *CD*. Докажите, что прямые *CD* и *EF* перпендикулярны.



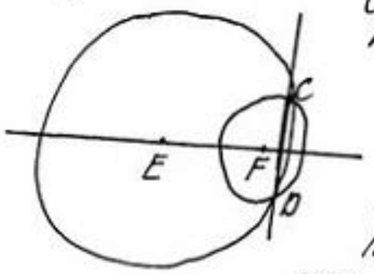
Дано: окр. ц. E, окр. ц. F
окр. пересекаются в C и D;
Док-ть: CD ⊥ EF

Док-во.

1). Проведем радиусы EC, ED, FC, FD
EC = ED (радиусы) => E равноудалено от C и D
FC = FD (радиусы) => F равноудалена от C и D
=> EF - сер. перпендикуляр к CD => EF ⊥ CD?

Упражнение 24.5. Две окружности с центрами E и F пересекаются в точках C и D, приём точки E и F лежат по одну сторону относительно прямой CD. Докажите, что прямые CD и EF перпендикулярны.

Задание № 24



C и D - точки пересечения окружностей

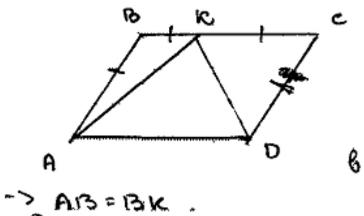
Доказать: EF ⊥ CD

Доказательство:

Т.к. E и F - центры окружностей, то EF является осью симметрии для обеих окружностей. Предположим, что EF не перпендикулярна CD, тогда для точек C и D должны быть симметричные, но это противоречит условию задачи, т.к. C и D - точки пересечения двух окружностей

Упражнение 24.6. Биссектрисы углов A и D параллелограмма $ABCD$ пересекаются в точке K, лежащей на стороне BC. Докажите, что K — середина BC.

N 24



Доказательство:
AB = CD (тк ABCD - ромб).
Рассмотрим ΔABK
он равнобедренный (тк биссектриса в паралл. отсекает р б- треугольник) =>
=> AB = BK.
Рассмотрим ΔKCD: он равнобедренный (тк биссектриса в параллелограмм отсекает рб треугольник.) => KC = CD.
Тк AB = CD, AB = BK, CD = KC => BK = KC => K - середина BC.
см. лист 2.

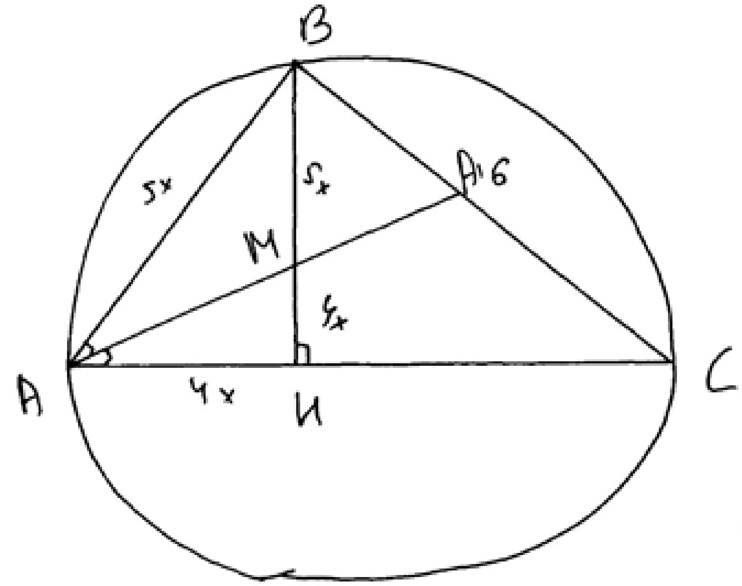
Дано:
ABCD - параллелограмм.
K - точка пересечения биссектрис.

Доказать:
K - середина BC
Вывод: ЧТД.

Задание 25

Упражнение 25.1. В треугольнике ABC биссектриса угла A делит высоту, проведённую из вершины B, в отношении $5:4$, считая от точки B. Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если $BC = 6$.

Ответ: 5.



Дано:

Окр$(O;R)$

$\triangle ABC$

$BC = 6$

AA_1 - биссектриса

$BИ$ - высота.

$BM:MИ = 5:4$.

Найти:

R

Решение:

$R = \frac{BC}{2\sin A} = \frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{2}\sin A} = \frac{3}{\sin A}$.

1. Рассмотрим $\triangle ABИ$:

$\sin A = \frac{BИ}{AB} = \frac{9x}{AB} = \frac{9\cancel{x}}{5\cancel{x}} = 1,8$ (т.к. AM делит основание, в том же отношении, что и боковые стороны) $\Rightarrow$

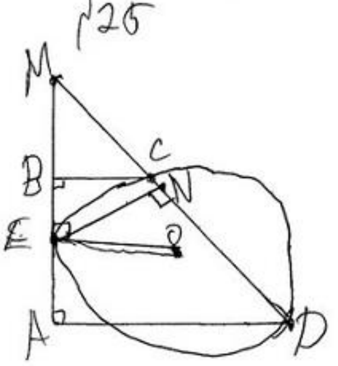
$\Rightarrow R = \frac{3}{\sin A} = \frac{3}{1,8} = 1\frac{2}{3}$

Ответ: $R = 1\frac{2}{3}$.

Упражнение 25.2. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

№25



Дано:
$BC=5$
$AD=6$
$BC \parallel AD$
$ABCD$ – трапеция
$BA \perp BC$

EN – ?

пункт 1)
продлим стороны AB и CD до пересечения в точке M.
т.к. нужно найти расстояние от E до прямой CD $\Rightarrow$ $\angle END = 90^\circ$

пункт 2)
т.к. ME – касательная, MD – секущая, то по теореме о касательной и секущей $\Rightarrow ME^2 = MC \cdot MD$

пункт 3) $\triangle MBC$ и $\triangle EMN$ и $\triangle AMD$ – прямоугольные (знак $\triangle$)
$\triangle MBC \sim \triangle EMN$ по углу ($\angle BMC = \angle EMN$)
$\triangle EMN \sim \triangle MAD$ по углу $\angle EMN = \angle AMD$

~~Пункт~~

СМ лист 6

Пункт 4)
Из подобия $\triangle MBC$ и $\triangle EMN \Rightarrow \frac{EN}{BC} = \frac{EM}{MC}$
Из подобия $\triangle EMN$ и $\triangle MAD \Rightarrow \frac{EN}{AD} = \frac{EM}{MD}$ $\Rightarrow$

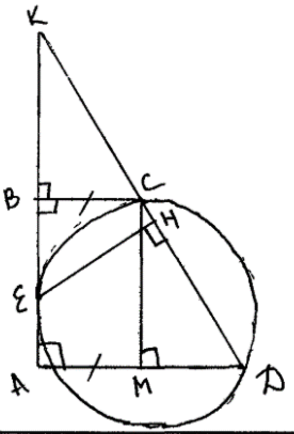
$EN^2 = BC \cdot AD \cdot \frac{EM^2}{MC \cdot MD}$ из п. 2 $\Rightarrow \frac{EM^2}{MC \cdot MD} = 1 \Rightarrow$

$EN^2 = BC \cdot AD$ $EN^2 = 5 \cdot 6$ $EN > 0 \Rightarrow EN = \sqrt{30}$

Ответ: $EN = \sqrt{30}$

Упражнение 25.3. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.



№ 25.

Дано: $ABCD$ – трап.
$AB \perp BC$
т. C, D, E – на окр., т. $E \in AB$
$AD = 6$
$BC = 5$

Найти: EH – ?

см. лист 4

1. продлим DC и AB, т. пересеч. продолж. сторон обозначим т. K
2. из т. C проведём высоту к стороне AD, обозначим её CM.
3. т.к. $ABCD$ – трап. $\Rightarrow BC \parallel AM$, по усл. $AB \perp BC$, выс. $CM \perp BC$, $CM \perp AD$
$\Rightarrow CM \parallel AB$, $\angle ABC = 90°$, $\angle BAM = 90°$ (по св-ву трап.), $\angle CMA = 90°$, $\angle BCM = 90°$ (CM – выс., $CM \perp BC$, $CM \perp AD$)
4. $CM \parallel AB$ (п. 3), $BC \parallel AM$ (п. 3), все $\angle$ в четыр. $ABCM = 90°$ (п. 3) $\Rightarrow$ $ABCM$ – прямоуг. $\Rightarrow$ $BC = AM = 5$
5. $AD = AM + MD \Rightarrow MD = AD - AM = AD - BC = 6 - 5 = 1$
6. рассмотрим $\triangle KBC$ и $\triangle CMD$:
 - $\angle KBC = \angle CMD = 90°$
 - при $BC \parallel AD$ ($ABCD$ – трап.) KD – секущ., н/ накрест-лежащие $\angle = \Rightarrow \angle KCB = \angle CDM$

$\Rightarrow \triangle KBC \sim \triangle CMD$ (по 2м $\angle$) $\Rightarrow \dfrac{BC}{MD} = \dfrac{KC}{CD}$ $\Rightarrow \dfrac{5}{1} = \dfrac{KC}{CD} \Rightarrow KC = 5CD$
7. по т. о квадрате касательной:
$EK^2 = KD \cdot KC$, $KD = KC + CD \Rightarrow$
$EK^2 = \cancel{KD} (KC + CD) \cdot KC$
т.к. $KC = 5CD \Rightarrow EK^2 = 6CD \cdot CD \Rightarrow EK = \sqrt{6CD^2} = CD \cdot \sqrt{6}$

8. в четыр. AEHD $\angle EAD = \angle EHD = 90°$, по т. о сумме $\angle$ в четыр.:

$$\underbrace{\angle EAD + \angle EHD}_{180°} + \angle HDA + \angle AEH = 360° \Rightarrow \angle HDA + \angle AEH = 180°$$

9. $\angle KEH$ и $\angle AEH$ – смежные $\Rightarrow$ по св-ву $\angle KEH + \angle AEH = 180°$

10. $\left.\begin{array}{l} \angle KEH + AEH = 180° \ (п.9) \\ \angle HDA + \angle AEH = 180° \ (п.8) \end{array}\right\} \Rightarrow \angle KEH = \angle HDA$

11. рассм. $\triangle KHE$ и $\triangle CMD$:

$\left.\begin{array}{l} \cdot \angle KHE = \angle CMD = 90° \\ \cdot \angle KEH = \angle HDA \ (п.10) \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle KHE \sim \triangle CMD$ (по 2м $\angle$) $\Downarrow$ $\dfrac{EH}{MD} = \dfrac{EK}{CD}$ $EH = \dfrac{MD \cdot EK}{CD}$

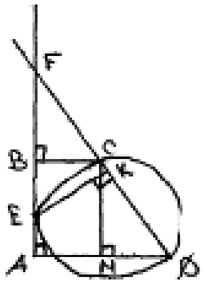
$EH = \dfrac{1 \cdot EK}{CD} = \dfrac{\cancel{CD} \cdot \sqrt{6}}{\cancel{CD}}$ (п 7) $= \sqrt{6}$

Ответ: $\sqrt{6}$

Упражнение 25.4. В трапеции $ABCD$ боковая сторона AB перпендикулярна основанию BC. Окружность проходит через точки C и D и касается прямой AB в точке E. Найдите расстояние от точки E до прямой CD, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

N 25



Дано: ABCD – трапеция
$AB \perp BC$
$AD = 6$
$BC = 5$
Окружность
Найти: EK

Решение:

1) Достроим прямые AB и CD так, чтобы они пересек. в т. F

Рас-мим $\triangle BFC$ и $\triangle AFD$:

$\left.\begin{array}{l} \angle F \text{ – общ.} \\ \angle A = \angle FBC \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle BFC \sim \triangle AFD$ по 2м углам

$\Downarrow$ $\dfrac{BC}{AD} = \dfrac{FC}{FD} = \dfrac{FB}{FA} = \dfrac{5}{6}$

2) Проведем высоту CM

$AD = AM + MD$

$BC = AM$ (т.к. $\angle A = \angle ABC = \angle BCM = \angle CMA = 90° \Rightarrow ABCM$ – прямоугольник)

$AM = 5$

$MD = AD - AM$

$MD = 6 - 5 = 1$

Рас-мим $\triangle AFD$ и $\triangle MCD$:

$\left.\begin{array}{l} \angle D \text{ – общ.} \\ \angle CMD = \angle A \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AFD \sim \triangle MCD$ по 2м углам

см. лист 5

3) ТК $\triangle BFC \sim \triangle AFD$ и $\triangle MCD \sim \triangle AFD \Rightarrow \triangle MCD \sim \triangle BFC \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{MD}{BC} = \frac{CD}{FC} = \frac{CM}{FB} = \frac{1}{5}$

$\frac{CD}{FC} = \frac{1}{5} \Rightarrow FC = 5CD$

Пусть $\cancel{CD}$ FC $= x \Rightarrow CD = 5x$

4) $FE^2 = FC \cdot CD$ (по теор. о кас. и секущ.)

$FE^2 = FC \cdot (FC + CD)$

$FE^2 = x(x + 5x)$

$FE^2 = 6x^2$

$FE = \sqrt{6} \cdot x$

5) Рас-мим $\triangle EFK$ и $\triangle AFD$:

$\left.\begin{array}{l}\angle F\text{-общ.}\\ \angle FKE = \angle A\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle EFK \sim \triangle AFD$ по 2м углам $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FEK = \angle FDA$

6) Рас-мим $\triangle MCD$:

$\cos\angle D = \frac{MD}{CD}$

$\cos\angle D = \frac{1}{5x}$

7) ТК $\angle D = \angle E \Rightarrow \cos\angle D = \cos\angle E$

8) Рас-мим $\triangle EFK$

$\cos\angle E = \frac{EK}{EF}$

$\cos\angle E = \cos\angle D \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos\angle D = \frac{EK}{EF}$

$\frac{1}{5x} = \frac{EK}{\sqrt{6} \cdot x}$

$EK \cdot 5x = \sqrt{6} \cdot x$

$EK = \frac{\sqrt{6}\cancel{x}}{5\cancel{x}}$

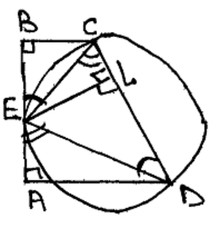
$EK = \frac{\sqrt{6}}{5}$

Ответ: $\frac{\sqrt{6}}{5}$

Упражнение 25.5. В трапеции *ABCD* боковая сторона *AB* перпендикулярна основанию *BC*. Окружность проходит через точки *C* и *D* и касается прямой *AB* в точке *E*. Найдите расстояние от точки *E* до прямой *CD*, если $AD = 6$, $BC = 5$.

Ответ: $\sqrt{30}$.

25



Дано:

ABCD-трап.; $AB \perp BC$;
ω-окружность;
[ω(O;R)]; C∈ω; D∈ω;
E∈ω; E∈AB;
$EL \perp CD$; AD=6; BC=5

Найти: EL

Решение:

1) Проведём хорды EC и ED

2) Т.к. $AB \perp BC \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ$;

3) Т.к. ABCD-трап. (по усл.) $\Rightarrow BC \parallel AD$ (по ~~св-ву~~ определению т.к BC и AD-основан.) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CBA = 90^\circ$ (как односторонние при $BC \parallel AD$ и сек. AB)

4) Рас-м $\triangle EBC$ и $\triangle ELD$

$\angle ELD = \angle EBC = 90^\circ$

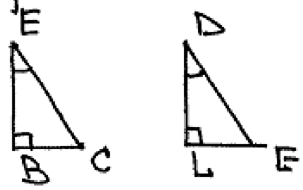
$\angle BEC = \angle ECD$ (по теореме об угле между касательной и хордой) $\Big\} \Rightarrow$

СМ. ЛИСТ 5

$\Rightarrow \triangle EBC \sim \triangle ELD$ (по 2 углам)

5) $\triangle EBC \sim \triangle ELD$ (см. п.4) $\Rightarrow$

$$\frac{EB}{DL} = \frac{EC}{DE} = \frac{BC}{LE}$$



6) Рас-м $\triangle AED$ и $\triangle CEL$

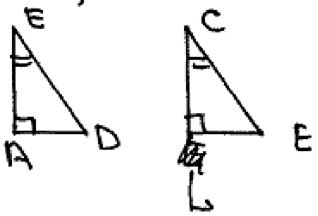
~~$\angle CEL$~~ $\angle CLE = \angle EAD = 90^\circ$

$\angle ECL = \angle AED$ (по теореме об угле между касательной и хордой) $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle AED \sim \triangle ECL$ (по 2 углам)

7) $\triangle AED \sim \triangle ECL$ (см. п.6) $\Rightarrow$

$$\frac{CL}{AE} = \frac{LE}{AD} = \frac{EC}{ED}$$



8) $\frac{EC}{ED} = \frac{LE}{AD}$ (см. п.7); $\frac{EC}{ED} = \frac{BC}{LE}$ (см. п.5) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\frac{BC}{LE} = \frac{LE}{AD} \Rightarrow BC \cdot AD = LE^2$

$LE^2 = 5 \cdot 6 = 30 \Rightarrow LE = \sqrt{30}$

Ответ: $\sqrt{30}$