15 Решите неравенство $\log_{0,5}\left(x^3-3x^2-9x+27\right)\le\log_{0,25}(x-3)^4$.

Решение.
Запишем исходное неравенство в виде:

$$\log_{0,5}\left((x-3)^2(x+3)\right)\le\log_{0,5}(x-3)^2;$$

$$\log_{0,5}(x-3)^2+\log_{0,5}(x+3)\le\log_{0,5}(x-3)^2.$$

Правая часть неравенства определена при $x\ne3$. При $x\ne3$ неравенство принимает вид:

$$\log_{0,5}(x+3)\le0;\ x+3\ge1,$$

откуда $x\ge-2$. Учитывая ограничение $x\ne3$, получаем: $-2\le x<3$; $x>3$.

Ответ: $[-2;3)$; $(3;+\infty)$.

№15

$$\log_{0,5}(x^3-3x^2-9x+27) \le \log_{0,25}((x-3)^4)$$

$$x^3-3x^2-9x+27 = x^2(x-3)-9(x-3) = (x^2-9)(x-3) = (x+3)(x-3)^2$$

Получаем: $\log_{0,5}((x+3)(x-3)^2) \le \log_{0,25}((x-3)^4)$

ОДЗ: $\begin{cases}(x+3)(x-3)^2>0\\(x-3)^4>0\end{cases}$; $x>-3$

$$-\log_2((x+3)(x-3)^2) \le -\frac{1}{2}\log_2((x-3)^4)$$

$$\log_2((x-3)^{2}) - \log_2((x+3)(x-3)^2) \le 0$$

используя метод рационализации:

$$\cancel{\overset{>0}{(2-1)}((x-3)^8-(x+3)(x-3)^2) \le 0 ;\ (x-3)^2((x-3)^6-(x+3)) \le 0}$$

$$\overset{>0}{(2-1)}((x-3)^2-(x+3)(x-3)^2) \le 0 ;\ (x-3)^2(x+2) \ge 0$$

$-\quad -2 \quad + \quad 3 \quad +$

$x\in[-2;+\infty)$; с уч. ОДЗ: $x\in[-2;+\infty)$.

Ответ: $x\in[-2;+\infty)$.

№15

$$\log_{0,5}(x^3-3x^2-9x+27) \leqslant \log_{0,25}(x-3)^4$$

$$-\log_2((x^2-9)(x-3)) \leqslant -\frac{1}{2}\log_2(x-3)^4$$

$$\frac{1}{2}\log_2(x-3)^4 - \log_2((x-3)^2(x+3)) \leqslant 0$$

$$\log_2(x-3)^2 - \log_2((x-3)^2(x+3)) \leqslant 0$$

по м. рационализации:

$$(2-1)((x-3)^2 - (x-3)^2(x+3)) \leqslant 0$$

$$(x-3)(x-3-(x-3)(x+3)) \leqslant 0$$

$$(x-3)(x-3-x^2+9) \leqslant 0$$

$$(x-3)(-x^2+x+6) \leqslant 0$$

$$(x-3)(x^2-x-6) \geqslant 0$$

$$(x-3)(x-3)(x+2) \geqslant 0$$

$$(x-3)^2(x+2) \geqslant 0$$

$x \in [-2; +\infty)$

с учётом условия:

$x \in [-2; 3) \cup (3; +\infty)$

Ответ: $x \in [-2; 3) \cup (3; +\infty)$

Условия:

$$\begin{cases} (x-3)^4 > 0 \\ x^3-3x^2-9x+27 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ (x^2-9)(x-3) > 0 \end{cases}$$

$$(x-3)^2(x+3) > 0$$

$x \in (-3; 3) \cup (3; +\infty)$.

№15

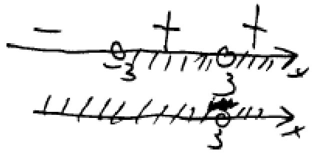
$\log_{0,5}(x^3-3x^2-9x+27) \le \log_{0,25}(x-3)^4$

1) условие $\begin{cases} x^3-3x^2-9x+27>0 \\ (x-3)^4>0 \end{cases}$

$\begin{cases} x^2(x-3)-9(x-3)>0 \\ x\neq 3 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-3)(x^2-9)>0 \\ x\neq 3 \end{cases}$

$\begin{cases} (x-3)^2(x+3)>0 \\ x\neq 3 \end{cases}$



$x\in(-3;3)\cup(3;+\infty)$

2) $\log_{0,5}(x^2-3x^2-9x+27) \le \frac{2}{2}\log_{0,5}(x-3)^2$

$\log_{0,5}(x^2-3x^2-9x+27) \le \log_{0,5}(x-3)^2$, $0<0,5<1$

$y=\log_{0,5}t$ убывает

$x^2-3x^2-9x+27 \ge (x-3)^2$

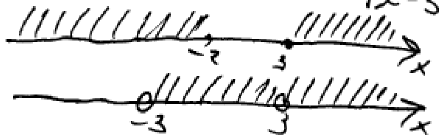
$x^2(x-3)-9(x-3) \ge (x-3)^2$

$(x-3)(x-3)(x+3) \ge (x-3)^2$

$(x-3)^2(x+3)-(x-3)^2 \ge 0$

$(x-3)^2(x+3-1) \ge 0$

$(x-3)^2(x+2) \ge 0$



$x\in(-3;-2]\cup(3;+\infty)$

Ответ: $(-3;-2]\cup(3;+\infty)$

№15. $\log_{0,5}(x^3-3x^2-9x+27) \le \log_{0,25}(x-3)^4$

$-\log_2\left((x-3)^2(x+3)\right) \le -\frac{1}{2}\log_2 (x-3)^4 \;\Big|\cdot(-1)$

$\log_2\left((x-3)^2(x+3)\right) \ge \frac{1}{2}\log_2 (x-3)^4$

$\log_2\left((x-3)^2(x+3)\right) \ge \log_2 (x-3)^2$.

$2>1$, $f(x)$ возрастае, получаем:

систему неравенств:

$$\begin{cases} (x-3)^2(x+3) \ge (x-3)^2 & (1)\\ (x-3)^2(x+3) > 0 & (2)\\ (x-3)^4 > 0 & (3)\end{cases}$$

Решим (1): $(x-3)^2(x+3) \ge (x-3)^2$

$(x-3)^2(x+3) - (x-3)^2 \ge 0$

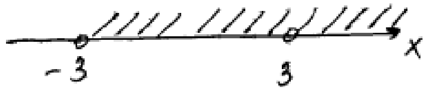
$(x-3)^2(x+3-1) \ge 0$

$(x-3)^2(x+2) \ge 0$

Решим (2): $(x-3)^2(x+3) > 0$

т.к. $(x-3)^2 > 0$:

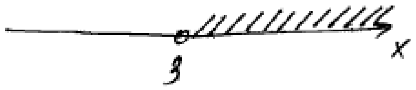
$\begin{cases} x+3 > 0 \\ x \ne 3\end{cases}$ $\begin{cases} x > -3 \\ x \ne 3\end{cases}$



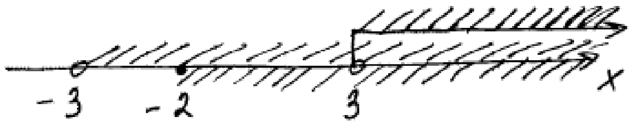
Решим (3): $(x-3)^4 > 0$

$x-3 > 0$

$x > 3$



Получаем:



Ответ: $x \in (3; +\infty)$

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(xy-2x+12)\cdot\sqrt{y-2x+12}=0,\\ y=3x+a\end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

Ответ: $-18<a\le-13$; $a=-10$; $a=14$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого только включением / исключением точек $a=-18$ и / или $a=-13$	3
С помощью верного рассуждения получен промежуток $(-18;-13)$ множества значений a, возможно, с включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом верно выполнены все шаги решения	2
Задача верно сведена к исследованию взаимного расположения гиперболы и прямых (аналитически или графически)	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0

№18

$$\begin{cases} (xy-2x+12)\cdot\sqrt{y-2x+12}=0 \ (1) \\ y=3x+a \ (2) \end{cases}$$ — ровно 2 различных решения

(1) $(xy-2x+12)\cdot\sqrt{y-2x+12}=$

$xy-2x+12=0$ или $\underbrace{\sqrt{y-2x+12}}_{\geq 0}=\underset{=0}{0} \quad |^2$

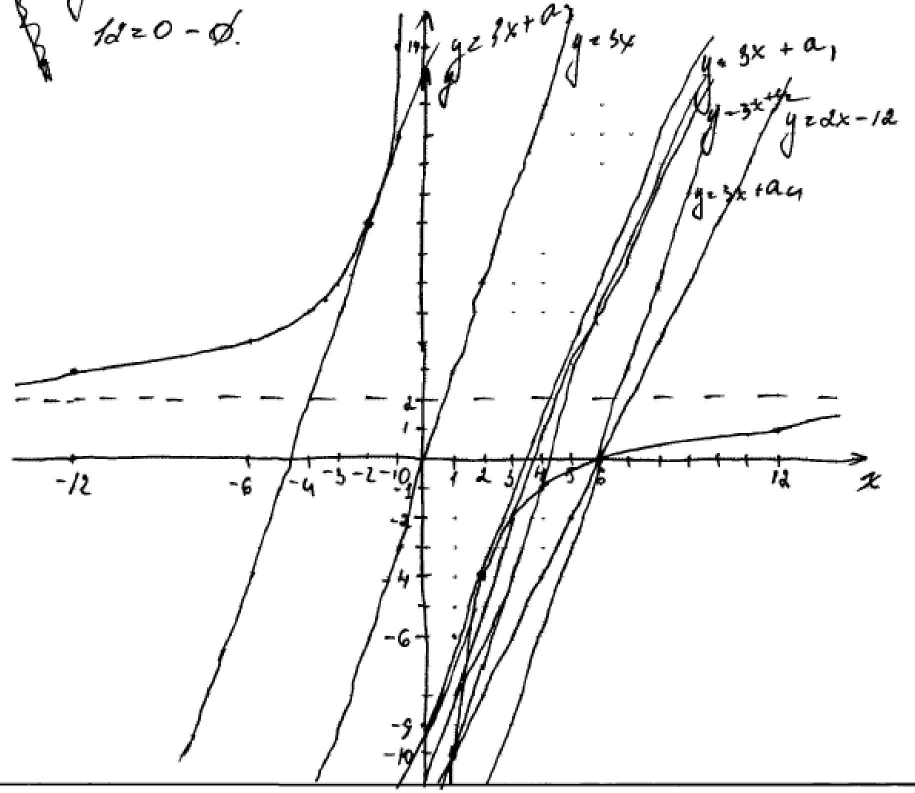
$y=-\frac{12}{x}+2 \ (x\neq 0)$ $\qquad$ $y-2x+12=0$

$0\cdot y-2\cdot 0+12=0$ $\qquad$ $y=2x-12.$

$12=0$ — $\varnothing$.

(2) $y=3x+a$ — прямые

$y=3x$ параллельно по прямой оси OY в зависимости от a.



Усл. касания прямой $y=3x+a$ и гиперболы $y=-\frac{12}{x}+2.$

$$\begin{cases} -\frac{12}{x}+2=3x+a \quad (3) \\ \frac{12}{x^2}=3 \quad (4) \end{cases}$$

(4) $\frac{12}{x^2}=3 \Rightarrow x=\pm 2$

Для (5) при $x=\pm 2$

$x=2$: $\cancel{\frac{12}{2}}$ $-\frac{12}{2}+2=6+a \Rightarrow \boxed{a_1=-10.}$

$x=-2$: $-\frac{12}{-2}+2=-6+a \Rightarrow \boxed{a_3=14}$

Для т. $(6;0)$ $\qquad$ Для т. $(1;-10)$

$0=3\cdot 6+a \Rightarrow \boxed{a_4=-18.}$ $\qquad$ $-10=1\cdot 3+a=-13.$

Ответ: $a\in\{-18\}\cup\{-10\}\cup\{14\}\cup\{-13\}$

№18

$$\begin{cases}(xy-2x+12)\cdot\sqrt{y-2x+12}=0\\ y=3x+a\end{cases}$$

$$\begin{cases}xy-2x+12=0\\ y-2x+12=0\\ y=3\cdot x+a\end{cases}$$ при условии: $\underline{y-2x+12>0}$

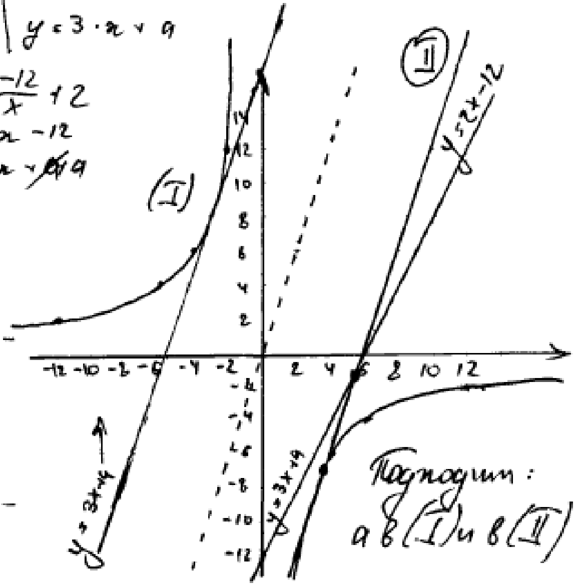
$$\begin{cases}x(y-2)+12=0\\ y=2x-12\\ y=3x+a\end{cases}\qquad \begin{cases}y-2=\frac{-12}{x}\\ y=2x-12\\ y=3x+a\end{cases}\qquad \begin{aligned}&y=\frac{-12}{x}+2\\ &y=2x-12\\ &y=3x+a\end{aligned}$$

Решим графически: в Положении I

прямая касается гиперболы $y=-\frac{12}{x}+2$ в 1 точке => выше этой точки будут 3 решения.

$y=3x+9$ ∩ $y=2x-12$ при любом a. => всегда 1 решение есть

В положении (II) прямая касается гиперболы в I точке => 2 решения



$$\begin{cases}y=3x+a\\ y=\frac{-12}{x}+2\end{cases}$$

$\Rightarrow 3x+a=\frac{-12}{x}+2$

$a=-\frac{12}{x}-3x+2$

$-3x+2-\frac{12}{x}-a=0 \quad |\cdot(-x)\neq 0$

$3x^2+x(a-2)+12=0$

$D=0 \Rightarrow D=(a-2)^2-48\cdot 3=0$

$D=a^2-4a+4-144=0 \Rightarrow D=a^2-4a+4-144=0$

$\cancel{a^2-24a=0} \Rightarrow \cancel{a(a-12)=0}$

$\cancel{a=0,\ a=12}$ $\qquad a^2-4a-140=0 \qquad D_1=16+560=576=24^2$

$a_1=\frac{4+24}{2}=\frac{28}{2}=14$

$a_2=\frac{4-24}{2}=\frac{-20}{2}=-10$

Однако учтем услов $y-2x+12>0$ => в точке II значение не подходит.

Ответ: $a=14$

проверим $x=0$:

$$\begin{cases}12\sqrt{y+12}=0\\ y=a\end{cases}$$

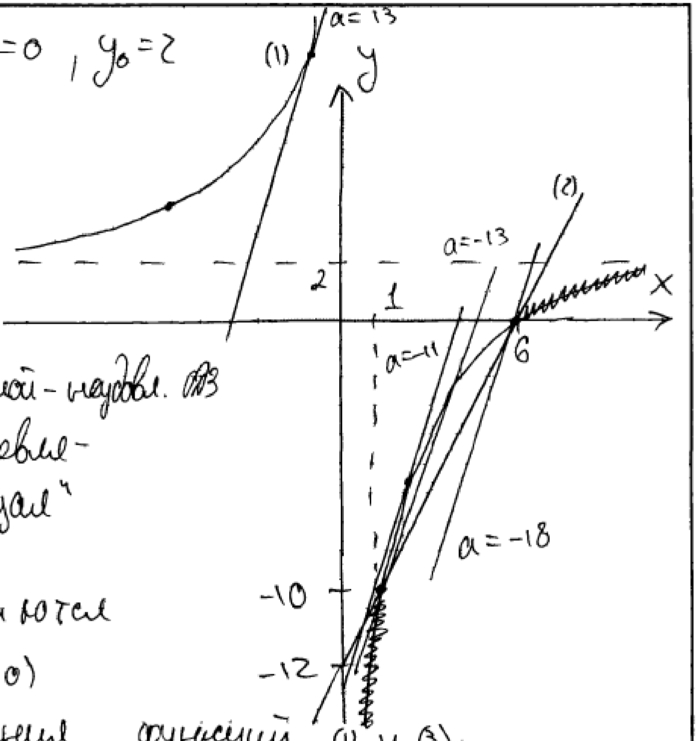
$12\cdot\sqrt{a+12}=0$ имеет 1 решение => не подходит

Ответ: 1400

18) $\begin{cases}(xy-2x+12)\cdot\sqrt{y-2x+12}=0\\ y=3x+a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(1)\ xy-2x+12=0\\ (2)\ \sqrt{y-2x+12}=0\\ (3)\ y=3x+a\end{cases}$

Графиком ур-я (1) будет являться гипербола

с асимптотами $x_0=0$, $y_0=2$



решение ур-я (2) задает на координатной плоскости прямую $y=2x-12$

$\sqrt{y-2x+12}=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} y-2x+12=0\\ y-2x+12\geq 0\end{cases}$ - нижне прямой - неудовл. ОДЗ

ур-е (3) графиком является прямая "плавающая" вдоль оси ординат

графики (1) и (2) пересекаются в точках (6;0) и (1;-10)

Найдем точки касания функций (1) и (3).

$\begin{cases} xy-2x+12=0\\ y=3x+a\end{cases} \Rightarrow 3x^2+x(a-2)+12=0 \Rightarrow a^2-2a-143=0$

$D=0$ - условие касания; $\left[\begin{array}{l}a=-11\\ a=13\end{array}\right. \Rightarrow$

При $a=-11$ и $a=13$ функция (3) касается функции (1)

Функция (3) проходит через точки (6;0) и (1;-10) при $a=-18$ и $a=-13$ соответственно

Проанализируем: $a>13$ - 3 решения

$a=13$ - 2 решения

$13>a>-11$ - 1 решение

$a=-11$ - 2 решения

$-11>a>-13$ - 3 решения

$-13\geq a>-18$ - 2 решения

$a\leq -18$ - 1 решение

Ответ: $a\in(-18;-13]\cup\{-11\}\cup\{13\}$